

电动舵机可靠运行的参数耦合关系分析

王超¹, 庞博², 邓宏彬^{1*}

(1. 北京理工大学 机电学院, 北京 100081; 2. 河北工程大学, 邯郸 056038)

摘要: 由于不同的系统参数之间有着复杂的耦合关系, 所以机电系统的可靠性分析一直是一个世界性的、富有挑战性的难题。文中提出了一个针对机电系统可靠运行的分析框架: 运用基本物理规律建立了电动舵机系统的数学模型, 并对电机电压、舵机转速和齿轮组减速比几个主要变量之间的关系进行了两两分析, 最后得出了三个能指导电机选择和系统优化的结论。

关键词: 电动舵机系统; 参数耦合; 仿真; 可靠性; 系统设计。

中图分类号: TJ (“武器装备”栏目的文章必须要有英文摘要)

文献标志码: A

0 引言

电动舵机被广泛应用于飞行器进行空中姿态调整的转向系统。在飞行过程中, 飞行器往往面临着气流的随机扰动等不稳定且非常复杂的航空环境, 这样就对飞行器的精确控制要求很高。所以, 除了推进系统, 转向系统在飞行器系统控制中扮演着一个举足轻重的角色。为避免航线偏差甚至坠毁, 对于通过调整舵机偏角来维持和调整姿态的飞行器, 电动舵机的可靠运行至关重要。然而, 电动舵机的可靠运行却正成为飞行器设计中一个富有挑战的问题。

一般来说, 只有当电动舵机的机电参数满足特定条件的时候, 伺服电机才能驱动其有效工作。例如, 当电机输入电压过高时, 电机过度响应将导致舵机角度控制波动; 相反, 当电机输入电压过低时, 舵机将无法快速应对突发的过载扰动。因此, 分析伺服电机和电动舵机之间各参数的耦合关系是十分必要的。

为达到可靠运行的目的, 我们对电机和舵机之间的参数关系进行了系统研究, 综述了前人在本领域的研究, 构建了系统的数学模型, 主要集中讨论了模型的参数分析及各项参数的变化趋势, 并基于上述数学模型进行了建模仿真和验证该模型, 最后得出了几个关于如何选择合适的电机的结论。

1 文献综述

目前, 动态控制系统的可靠性分析主要运用 Lyapunov 和 Lagrange 稳定性理论[1][2]。这些理论为动态系统的稳定性研究提供了一个总体框架, 但并没有对其进行机电上的重点描述, 并且高度复杂的代数模型使得人们不能直接观察得到模型参数之间的耦合关系。为了简化分析, Alexandru Forrai 等人提出了以内燃机的电磁阀执行器速度为研究重点的线性变参数法(LPV)[3]。但是, 这种方法并不适用于舵机的旋转运动分析。

围绕机电系统的速度转矩特性, 杨树兴等人提出了一种用于电动舵机伺服系统的可靠运行参数分析方法[4]。这种方法成功地证明电机输出转矩和舵机旋转角速度在数学上的关系是一条椭圆曲线, 在负载轨迹和椭圆曲线相切点是最佳运行点。与此同时, 这种分析方法也为系统设计中电机的选择提供了显著有效的建议。

通过参考文献[4]的方法论框架, 我们分析了电机电压和舵机角加速度之间的关系, 对电机和舵机的各参数耦合关系进行了详细研究, 其参数分析的结果可用于解决系统设计中电机的选择问题。

电动舵机系统的数学建模

设电动舵机伺服系统包括 PWM 放大器、伺服电机、减速齿轮组和舵片[4], 运用机电学原理建立电动舵机系统的微分方程数学模型[5]。该系统模型的所有变量和参数及相应的数值如表 1 所示。

电机模型的建立基于三个基本原理: 电压不变, 机电等效转换和输出转矩不变。根据这些原理, 可得到电动舵机模型方程组, 如式(1)。

表 1 术语

符号	变量描述	使用值[4]
U	输入电压	变量
I	总电流	变量
R	终端电阻	0.360 Ohm
L	终端电感	0.049 mH
t	时间	变量
K	反电势系数	0.0065 V·s·rad ⁻¹
K'	转矩常数	6.5 m·Nm·A ⁻¹
K''	铰链力矩的等效刚度	20 N·m·rad ⁻¹
θ	电机转角	变量
ω	舵片转速	变量
δ	舵偏角	变量
δ_m	舵机偏转幅值	0.04363 rad
Z	减速比	变量
M	输出转矩	变量
M_0	堵转转矩	变量
		$J = 1.1 \times 10^{-4}$
J	电机转子和齿轮组与舵面的总转动惯量	kg·m ²
J_1	齿轮组和舵面的转动惯量	$J_1 = 9.0 \times 10^{-5}$
J_2	电机转子和舵面的转动惯量	kg·m ²
		$J_2 = 3.0 \times 10^{-5}$
		kg·m ²
b	齿轮粘性摩擦系数	$b = 2.4 \times 10^{-6}$
		kg·m ²

$$\begin{cases} U = RI + L \frac{dI}{dt} + K \frac{d\theta}{dt} \\ M = K'I \\ M = M_0 + K''\theta + b \frac{d\theta}{dt} + J \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases} \quad (1)$$

从式(1)第一个等式中,可以看出输入电压一部分被消耗在电机的回路电阻和电感中,剩下的转换成机械功输出;第二个等式表明电机输出力矩与电流成正比;最后一个等式基于电动舵机系统力矩不变原理得到。根据这三个等式,可得到电机电流的微分方程,如式(2)。

$$\begin{cases} I = \frac{1}{K'}(M_0 + K''\theta + b\dot{\theta} + J\ddot{\theta}) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{1}{K'}(K''\dot{\theta} + b\ddot{\theta} + J\ddot{\theta}) \end{cases} \quad (2)$$

舵机中,电机和减速齿轮组驱动偏转舵片做正弦式运动。该齿轮组减速比可由电机转角和舵偏角的比值得出,如式(3)。

$$\begin{cases} Z = \frac{\theta}{\delta} \\ \delta = \delta_m \sin \omega t \end{cases} \quad (3)$$

基于式(3),我们可以计算得到舵偏角的一阶、二阶和三阶微分方程,如式(4)。

$$\begin{cases} \theta = Z\delta_m \sin \omega t \\ \dot{\theta} = Z\delta_m \omega \cos \omega t \\ \ddot{\theta} = -Z\delta_m \omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{\theta} = -Z\delta_m \omega^3 \cos \omega t \end{cases} \quad (4)$$

将式(2)及(3)带入式(1)的第一个等式——电压平衡方程,我们可以得到电机电压和转角之间的关系,如式(5)。

$$U = \frac{LJ}{K'} \ddot{\theta} + \frac{RJ + Lb}{K'} \dot{\theta} + \frac{Rb + LK'' + KK'}{K'} \theta + \frac{K''R}{K'} \theta + \frac{RM_0}{K'} \quad (5)$$

对式(4)中电机转角进行微分变换,可将电机电压用三角函数表示,如式(6)。

$$\frac{U - \frac{RM_0}{K'}}{\frac{Z\delta_m}{K'}} = ((Rb + LK'' + KK')\omega - LJ\omega^3) \cos \omega t + (K''R - (RJ + Lb)\omega^2) \sin \omega t \quad (6)$$

由于在时域上电机电压的线性变化服从余弦定律[4],因此,可通过消除式(6)中的正弦项来设置舵机的预定频率。将正弦项系数设为0,如式(7)所示。

$$\begin{aligned} K''R - (RJ + Lb)\omega^2 &= 0, \\ \omega_c &= \pm \sqrt{\frac{K''R}{RJ + Lb}} \end{aligned} \quad (7)$$

结合电机电压线性化后的余弦函数和式(4)中角加速度的正弦函数以及三角函数式 $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$,我们可以发现,电机电压和角加速度服从如式(8)中的椭圆关系。

$$\begin{aligned} \left(\frac{U - U_0}{U_m}\right)^2 + \left(\frac{\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}_m}\right)^2 &= 1, \\ U_0 &= \frac{RM_0}{K'}, \ddot{\theta}_m = Z\delta_m \omega_c^2, \\ U_m &= \frac{Z\delta_m}{K'} (Rb + LK'' + KK' - LJ\omega_c^2) \omega_c. \end{aligned} \quad (8)$$

如式(8)和图1所示,由于电机电压和角加速度都是正值,椭圆轨迹围绕着中心($U_0, 0$),并处于第一象限。

当电机运行时,速度——扭矩工作曲线通常穿过椭圆轨迹,即电机能提供足够的转矩和速度来驱动带负载的舵机。而如果工作曲线没有穿过椭圆轨迹,电机将无法带动负载,工作起来也不稳定。因此,当电机速度——扭矩工作曲线为椭圆轨迹的切线时,伺服系统最优运行。

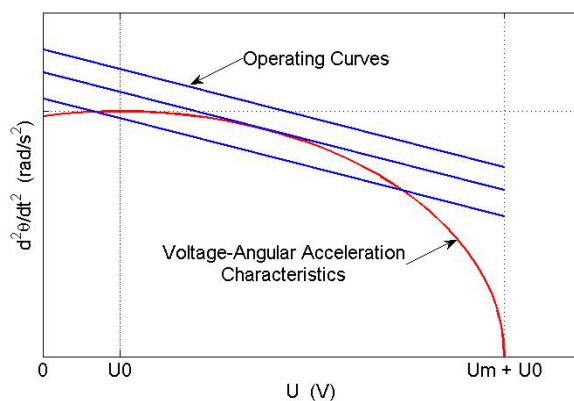


图1 速度——扭矩工作曲线与电机输入电压和角加速度的椭圆轨迹之间的关系

2 可靠运行参数分析

2.1. $\ddot{\theta}_m$ 和 δ_m 的关系

根据式 (8), 当系统参数 Z 和 ω_c 固定时, 电机最大角加速度 $\ddot{\theta}_m$ 正比于舵机偏转幅值 δ_m . 这意味着舵机偏转更大角度时电机需要提供更大的转矩来克服负载增量; 同时, 为了实时调整控制, 电机也需要更高的输入电压。

另外, 从电机电压——角加速度的椭圆轨迹中可得到一种变化: 如果代表角加速度的短轴变长, 代表电压的主轴将相应地变长, 使得在面积扩展的情况下, 保持其形状不变。

2.2. ω 、 Z 和 U_m 之间的关系

根据式 (8), U_m 是以系统参数 Z 作为系数的关于 ω 的三次多项式。这两个变量都是正数, 位于第一象限。当减速比改变时, 我们可以观察到函数曲线的变化趋势, 如图 2 所示。

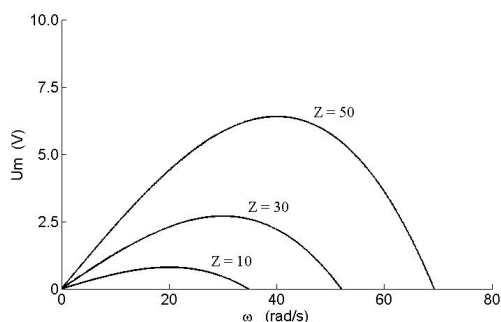


图 2 不同减速比下的转速 ω 和电压 U_m 之间的关系

由于复杂的高减速比驱动系统增大了伺服电机的负载, 所以很显然, 系统的 U_m 需要提高。

在图 2 中, 可通过式 (9) 关于 U_m 的微分方程来计算最大输入电压。

$$\frac{dU_m}{d\omega} = \frac{Z\delta_m}{K'}(Rb + LK'' + KK') - \frac{3Z\delta_m}{K'}LJ\omega^2 \quad (9)$$

设 $\frac{dU_m}{d\omega} = 0$, 可得到当转速为式 (9) 的正平方根 (如式 (10)) 时的最大输入电压。

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{Rb + LK'' + KK'}{3LJ}} \quad (10)$$

显然, 如图 2 所示, 当 ω 增大且小于 ω_{\max} 时, U_m 也会增大; 当 ω 增加到大于 ω_{\max} 时, U_m 将随着 ω 的增大而减小。这一结论可用于系统最优设计中电机选择的参考准则。根据某一确定系统对如转速预估区间和减速比等的需求, 结合以上结论可计算得出电机输入电压的峰值, 继而指导

控制电路的设计。

现在，考虑舵机在不同转速下的 Z 和 U_m 之间的关系。转子和齿轮组的惯性是导致减速比 Z 变化的主导因素。在这里，我们分别考虑转子和齿轮组的惯量 J_1 、 J_2 ，并详细分析这两个因素的影响。由于粘滞摩擦系数 b 很小，可以忽略不计，所以为了简化模型，将其设为 0。于是，式 (8) 中关于 U_m 的等式可改写为式 (11)。

$$U_m = \frac{\delta_m \omega (LK'' + KK') - L\delta_m \omega^3 J_2}{K'} \cdot Z - \frac{L\delta_m \omega^3 J_1}{K' \eta} \cdot \frac{1}{Z} \quad (11)$$

初始 J 可由 $J = J_2 + J_1/\eta Z^2$ 得到，其中 η 是齿轮组的传动效率。

由此，我们可根据式 (11) 作出不同转速下舵机减速比 Z 和电压 U_m 之间的关系曲线。如图 3 所示， U_m 在第一象限单调递增，并且随着 ω_c 的增加而快速上升。这个观察结果恰好表明，系统设计中，机械传动系统减速比受电机性能参数限制。换句话说，减速比其实是伺服机电系统中电子和机械之间复杂度的权衡量。

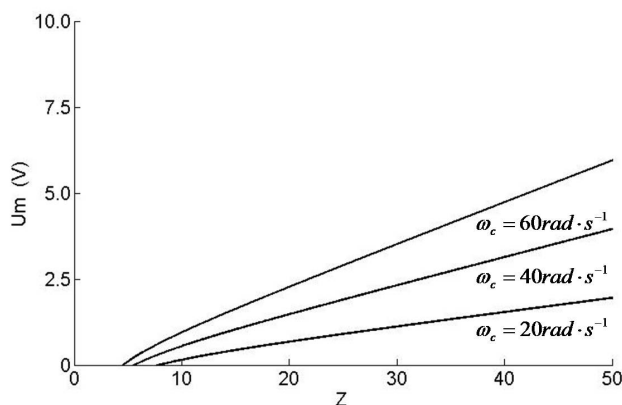


图 3 不同转速下减速比 Z 和电压 U_m 之间的关系

3 仿真

为了验证对舵机伺服系统的上述分析，运用 Simulink 软件进行建模仿真。为确保在同等条件下进行所有参数仿真，利用 MATLAB 的 `hinfyn` 命令[6]设置一个 H_∞ 控制器[7]，以使得在不确定条件下电机能够稳定运行。从外界影响因素（引用指令、传感器噪声和外力干扰等）到被控变量（跟随误差、控制输入信号等）的闭环增益是系统的一个重要性能指标。而该 H_∞ 控制器可以尽量减少加权系统的增益。整个仿真分析分为电机转速和减速比两部分，分别与最大电压进行对比分析。

首先给定一系列不同转速，测得系统的阶跃响应。减速比设定为常数 40，不会对仿真结果产生影响。如图 2 所示，电机转速在 10rad/s 到 50rad/s 之间变化。如果转速超出这个区间，电机系统就将超载。如图 4 所示，在 0.2s 时输入一个从 0 跳变到 1 的阶跃信号，电机系统会在不同转速下跟随参考输入。当转速为 10rad/s 时，系统响应速度缓慢。同时，可以发现低转速引起了一个相对较大的超调量；随着转速的增加，超调量显著减小，调节时间变短。然而，50rad/s 时的系统响应比 40rad/s 时的系统响应状况要差很多。也就是说，电机的最佳转速大约是 40rad/s，系统响应和转速并不线性相关（见图 2）。

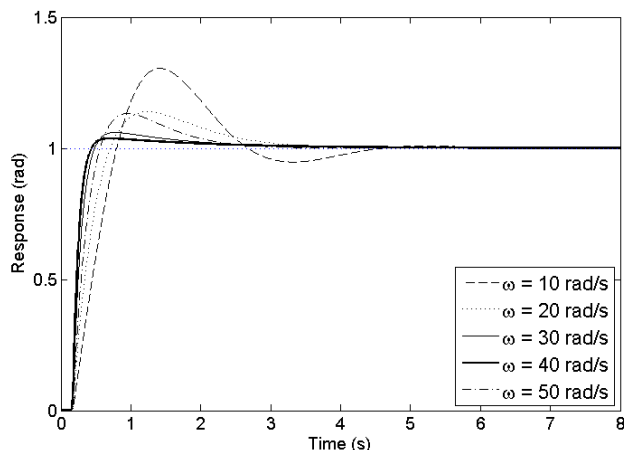


图4 不同转速下电机系统的阶跃响应

表2列出了不同转速下系统性能的三个指标：最大超调量 σ_p 、峰值时间 T_P 、调节时间 T_S 。显然，在转速为40rad/s时，系统性能达到最佳响应状态。当转速增大至50rad/s时，由于在电压峰值周围转速与电压之间的关系并不对称，与30rad/s时的系统性能相比较，此时的系统性能下降尤为显著（如图2）。

表2 不同转速下系统阶跃响应的性能指标

ω	10	20	30	40	50
σ_p (%)	32.7365	15.5421	6.3847	4.9630	13.5041
T_P (s)	1.6654	1.4430	0.7159	0.4517	0.9525
T_S (s)	3.8231	2.3696	0.9362	0.5493	1.7565

然后，利用仿真得到机械设计中减速比对系统响应的影响效果。同样，就图3中的可行范围内，选择20到40的减速比，系统阶跃响应曲线如图5所示。

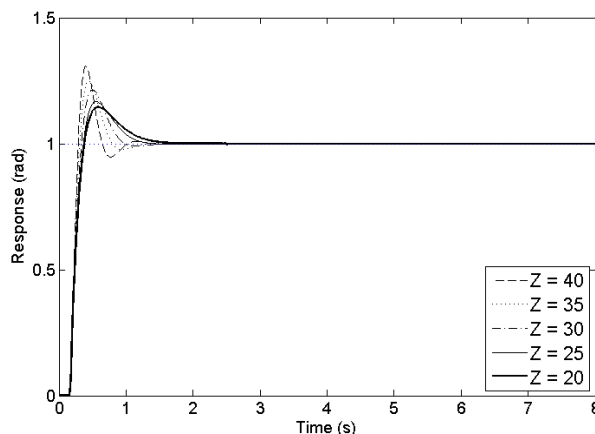


图5 不同减速比下电机系统的阶跃响应

从图5中可以得知，随着减速比的减小，系统性能呈线性提高，并在减速比为20的时候达到最佳状态。这表明，较大的减速比能带来更快的响应，同时也不可避免地伴随着较大的超调量；相反，较小的减速比可以有效抑制响应超调，但同时系统响应速度相对变慢。表3列出了不同减速比下系统的阶跃响应性能指标。

表3表明，在机械系统设计中，响应速度和超调量之间有着潜在的权衡关系。较快的响应必然产生较大的超调量；相反，减小了系统的超调量，就不得不使系统响应较慢。这也为系统设计师在系统超调和响

应时间之间权衡的时候提供了一个有用的指导。

表 3 不同减速比下系统的阶跃响应性能指标

Z	40	35	30	25	20
σ (%)	35.0507	29.7262	22.1720	18.7486	14.5197
T_P (s)	0.3971	0.4087	0.4911	0.5292	0.5850
T_S (s)	0.8046	0.2794	0.3100	0.3308	0.3517

4 结论

本文重点研究了电动舵机系统中参数的耦合关系，并由此得出了指导系统设计和可靠运行的三项原则。第一，系统输入电压与角加速度之间的数学关系是一条椭圆曲线，并且这两个变量有着固定比例，椭圆轨迹的形状保持不变。第二，在舵机转动变化的过程中，电机有一个电压峰值，可在一定的转速范围内实现系统可靠运行。第三，较高的减速比将大幅提高电机的最大电压。这表明，在系统设计中，电子和机械复杂度之间有着一个权衡关系。

在未来，预计将用多维建模来克服更复杂的系统参数分析难题。毫无疑问，扎实的电子系统参数分析将是系统可靠性至关重要的支撑。

鸣谢

这项工作获得了中国高技术研究与发展计划（2007AA04Z230）（863 计划）的大力支持。我们在此还特别感谢北京计算机应用技术研究所提供的计算和测试资源。

参考文献：

- [1] Michel, A., Hou, L. & Liu, D. (2007). *Stability of Dynamic Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*. Birkhäuser, Boston, MA.
- [2] Ioannou, P.A. & Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.
- [3] Forrai, A., Ueda, T. and Yumura, T. (2007). Electromagnetic Actuator Control: A Linear Parameter-Varying (LPV) Approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 54(3): 1430-1441.
- [4] Yang, S. & Zhong, P. (1997). On the Parametric Design of Electro-mechanical Actuators. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 6(2): 138-144.
- [5] Xia, C. (2009). *Control Systems of Brushless DC Motors*. Science Press, Beijing.
- [6] Manual for MATLAB Robust Control Toolbox: hinfsvn function, Math-Work, Inc.
- [7] Yao, B. (1996). *Adaptive Robust Control of Nonlinear Systems with Application to Control of Mechanical Systems*. University of California at Berkeley: Ph.D. Dissertation.