基于多波次齐射拦截的突防概率计算模型

金宏，余跃

北京控制与电子技术研究所信息系统工程重点实验室

摘要: 突防概率是反映导弹武器系统作战效能的基本指标之一。采用解析分析的方法，研究了多波次、多弹齐射进攻与拦截模式下的突防概率，推导了单枚和多波次进攻模式下导弹突防的概率和数学期望的计算模型，并进行了数学仿真。结果表明: 为了提高导弹武器的突防概率,当防御方拦截命中率比较低时，建议采用单枚导弹、多波次的进攻方案；当防御方拦截命中率比较高时，建议采用单波次、多枚导弹齐射的进攻方案。

关键词: 反导导弹; 齐射; 突防; 概率; 命中率; 拦截

0 引言

对于导弹武器系统来说，突防概率是一个比较重要的效能指标。多发齐射是常规导弹提高突防和反导导弹提高拦截的对策之一[3][5],也是战术上常用的方法，通常以2 发齐射较多[1]。但需要多少发齐射突防和齐射拦截比较合适？目前还没有标准答案，大多数研究是针对1对1拦截或2对1齐射拦截[1][4]，或者是反导导弹数是进攻导弹数（包括诱饵）的一倍与二倍之间[2]。

本文针对导弹多发齐射、多波次攻击与拦截的战术应用下的突防概率计算进行研究，从敌方防御和我方进攻的对抗过程来分析并建立适当的数学模型。在建立突防概率计算模型时，考虑防御方饱和拦截作战样式，也就是防御方发射比可能的进攻导弹更多的反导导弹。

1 概述

1.1 词汇

AMM	反导导弹
SSKP	单枚AMM的命中率
$s-m\times k$	s波次单弹进攻双方之间的攻防模式
s	进攻方单弹进攻时的波次数
m	防御方每波次防御时齐射拦截的AMM数
k	防御方波次防御时的防御波次数
p_k	防御方AMM系统第k波次拦截时的SSKP，其中$0\le p_k\le 1$。
q_k	防御方第k次单发AMM未命中目标的概率，$q_k=1-p_k$。
$P_{s-m\times k}(i)$	经防御方k波次AMM齐射后进攻方有i枚导弹突防的概率
$E_{s-m\times k}(N)$	成功突防（或未被拦截）的进攻导弹数量N的数学期望

1.2 基本假设

（1）防御方采用饱和拦截的方式，即发射比可能的进攻弹更多的 AMM。AMM 的数量取决于进攻方齐射的导弹数量，对进攻方单发进攻采用单发或多发齐射，对进攻方多发进攻的齐射进攻方式总是采用多于对方进攻导弹数量的齐射拦截。

（2）防御方 AMM 可以采用多波次多发齐射的拦截方式，防御方每波次齐射后都要进行效能评估，不管评估结果如何，每波次齐射的导弹数量相同。

（3）防御方 AMM 命中目标（进攻方导弹）或目标被拦截就意味着目标被击毁。

（4）进攻方波次进攻之间是相互独立事件，防御方波次防御之间是相互独立事件。

（5）进攻方每波次进攻导弹的发射之间是相互独立事件，防御方每波次 AMM 的齐射之间是相互独立事件。

1.3 问题的描述

对于$s-m\times k$的攻防模式，给定进攻方进攻波次数s、AMM系统的反导能力或反导导弹数m、AMM系统拦截波次数k和AMM每波次的SSKP（$=p_k$），求进攻导弹的突防概率$P_{s-m\times k}(i)$和突防导弹数的数学期望$E_{s-m\times k}(N)$。

2 单波次进攻交战模式 1-m×k 下的计算模型

2.1 突防概率计算模型

(1) 模式：1-m×1

对于首轮 m 对 1 的拦截，单枚进攻弹能够突防意味着 m 枚 AMM 都拦截失败，于是有：

$$P_{1-m\times 1}(0)=1-q_1^m \tag{1}$$

$$P_{1-m\times 1}(1)=q_1^m \tag{2}$$

(2) 模式：1-m×k

在第 k 轮拦截前，经第 k-1 轮拦截，可能出现单枚进攻弹被成功拦截或拦截失败两种情况，于是有：

$$P_{1-m\times k}(0)=P_{1-m\times(k-1)}(0)+P_{1-m\times(k-1)}(1)(1-q_k^m) \tag{3}$$

$$P_{1-m\times k}(1)=P_{1-m\times(k-1)}(1)q_k^m \tag{4}$$

表 1 给出 m 和 k 分别取 1、2 和 3 时几种 1-m×k 模式下的拦截概率和突防概率。对于单弹进攻，其拦截概率和突防概率分别是$P_{1-m\times k}(0)$和$P_{1-m\times k}(1)$，并且当 AMM 系统每波次拦截概率相同时有定理 1 的结论。

表 1：1-m×k 模式下的拦截概率和突防概率

模式	概率	
	$P_{1-m\times k}(0)$	$P_{1-m\times k}(1)$
$1-1\times 1$	p_1	q_1
$1-1\times 2$	$p_1+q_1p_2$	q_1q_2
$1-1\times 3$	$p_1+q_1p_2+q_1q_2p_3$	$q_1q_2q_3$
$1-2\times 1$	$p_1(1+q_1)$	q_1^2
$1-2\times 2$	$p_1(1+q_1)+q_1^2p_2(1+q_2)$	$q_1^2q_2^2$
$1-2\times 3$	$p_1(1+q_1)+q_1^2p_2(1+q_2)+q_1^2q_2^2p_3(1+q_3)$	$q_1^2q_2^2q_3^2$
$1-3\times 1$	$p_1(1+q_1+q_1^2)$	q_1^3
$1-3\times 2$	$p_1(1+q_1+q_1^2)+q_1^3p_2(1+q_2+q_2^2)$	$q_1^3q_2^3$
$1-3\times 3$	$p_1(1+q_1+q_1^2)+q_1^3p_2(1+q_2+q_2^2)+q_1^3q_2^3p_3(1+q_3+q_3^2)$	$q_1^3q_2^3q_3^3$

定理 1：当 AMM 系统每波次单发命中目标的概率 SSKP 都相同（$p_1 = p_2 = \cdots = p_k$）时，则有，

$$P_{1-m\times k}(0) = P_{1-k\times m}(0) \tag{5}$$

$$P_{1-m\times k}(1) = P_{1-k\times m}(1) \tag{6}$$

证明：一方面，由（4）

$$\begin{aligned} P_{1-m\times k}(1) &= P_{1-m\times(k-1)}(1)q_k^m \\ &= P_{1-m\times(k-2)}(1)q_{k-1}^m q_k^m \\ &= P_{1-m\times 1}(1)q_2^m \cdots q_{k-1}^m q_k^m \end{aligned}$$

由于 $q_1 = q_2 = \cdots = q_k = q$，于是由（2）得，

$$P_{1-m\times k}(1) = q_1^m q_2^m \cdots q_{k-1}^m q_k^m = q^{km}$$

由（3）得，

$$\begin{aligned} P_{1-m\times k}(0) &= P_{1-m\times(k-1)}(0) + q^{(k-1)m}(1-q^m) \\ &= P_{1-m\times(k-2)}(0) + q^{(k-2)m}(1-q^m) + q^{(k-1)m}(1-q^m) \\ &= \cdots \\ &= P_{1-m\times 1}(0) + q^m(1-q^m) + \cdots + q^{(k-2)m}(1-q^m) + q^{(k-1)m}(1-q^m) \end{aligned}$$

于是由（1）得，

$$\begin{aligned} P_{1-m\times k}(0) &= 1-q^m + q^m(1-q^m) + \cdots + q^{(k-2)m}(1-q^m) + q^{(k-1)m}(1-q^m) \\ &= 1-q^{km} \end{aligned}$$

另一方面，由（1）、（2）、（3）和（4），

$$P_{1-k\times 1}(0) = 1-q^k$$

$$P_{1-k\times 1}(1) = q^k$$

$$P_{1-k\times m}(0) = P_{1-k\times(m-1)}(0) + P_{1-k\times(m-1)}(1)(1-q^k)$$

$$P_{1-k\times m}(1) = P_{1-k\times(m-1)}(1)q^k$$

同理可得，

$$P_{1-k\times m}(1) = q^{mk} = P_{1-m\times k}(1)$$

$$P_{1-k\times m}(0) = 1-q^{mk} = P_{1-m\times k}(0)$$

证毕。

2.2 导弹突防枚数的数学期望计算模型

在 k 次 m 发齐射拦截来袭导弹时，进攻方单弹突防的数学期望：

$$E_{1-m\times k}(N) = 1\cdot P_{1-m\times k}(1) \tag{7}$$

于是由定理 1 和（7）可得下面的推论。

推论 1：当每波次拦截 AMM 单发命中目标的概率 SSKP 都相同（ $p_1 = p_2 = \cdots = p_k$ ）时，则有，

$$E_{1-m\times k}(N) = P_{1-m\times k}(1) \tag{8}$$

$$E_{1-m\times k}(N) = E_{1-k\times m}(N) \tag{9}$$

3 多波次进攻交战模式 s-m×k 下的计算模型

3.1 各波次打击下的突防概率

当进攻导弹经防御方 AMM 系统 k 波次拦截后，只有两种可能，一种情况是这枚进攻导弹突防成功，且突防概率是 $P_{1-m\times k}(1)$；另一种情况是这枚进攻导弹被防御方拦截成功，其被拦截成功的概率是 $P_{1-m\times k}(0)$。当分多波次进攻时，能够突防的导弹个数分布将会发生变化。

定理 2：考虑 s 波次单弹独立进攻，这 s 枚导弹中有 i 枚导弹能够成功突防的概率是，

$$P_{s-m\times k}(i) = C(s,i)\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s-i}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^{i} \tag{10}$$

其中，$C(s,i) = \dfrac{s!}{i!(s-i)!}$，$i = 0,1,2,\cdots,s$。

证明：由二项式分解公式，

$$(a+b)^s = C(s,0)a^s + C(s,1)a^{s-1}b + C(s,2)a^{s-2}b^2 + \cdots + C(s,s)b^s$$

其中，s 表示进攻波次。令 $a = P_{1-m\times k}(0)$，$b = xP_{1-m\times k}(1)$，代入二项式分解公式得到，

$$\begin{aligned}(a+b)^s &= \left(P_{1-m\times k}(0) + xP_{1-m\times k}(1)\right)^s \\ &= C(s,0)\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^s + C(s,1)\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s-1}P_{1-m\times k}(1)x + \\ &\quad + C(s,2)\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s-2}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^2x^2 + \cdots + C(s,s)\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^s x^s\end{aligned}$$

上式中 x^i 表示有 i 枚进攻弹成功突防这一事件，于是，经 s 波次打击后，共有 s 枚进攻导弹分 s 波次独立进攻，在这 s 枚导弹中有 i 枚导弹能够成功突防的概率是（$i = 0,1,2,\cdots,s$）：

$$P_{s-m\times k}(i) = C(s,i)\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s-i}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^{i}$$

证毕。

推论 2：经 s 波次单弹进攻的 $s-m\times k$ 模式下，这 s 枚导弹都被拦截成功的概率与都成功突防的概率分别是：

$$P_{s-m\times k}(0) = \left(P_{1-m\times k}(0)\right)^s$$

$$P_{s-m\times k}(s) = \left(P_{1-m\times k}(1)\right)^s$$

3.2 各波次打击下的进攻方导弹突防枚数的数学期望

对于$s-m\times k$的 s 波次单弹攻防模式，由定理 2 可得，经 s 波次打击下的进攻方导弹突防枚数的数学期望为：

$$E_{s-m\times k}(N)=\sum_{i=1}^{s}\left[i\cdot C(s,i)\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s-i}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^{i}\right] \tag{11}$$

定理 3：对于单弹进攻$1-m\times k$攻防模式和多波次$s-m\times k$攻防模式，$E_{1-m\times k}(N)$和$E_{s-m\times k}(N)$分别是这两种模式下的突防导弹数的数学期望，则有如下关系，

$$E_{s-m\times k}(N)/s=E_{1-m\times k}(N) \tag{12}$$

证明：由（11）式，

$$\begin{aligned}\frac{E_{s-m\times k}(N)}{s}&=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left[i\cdot C(s,i)\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s-i}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^{i}\right]\\&=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\left[i\cdot\frac{s!}{i!\cdot(s-i)!}\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s-i}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^{i}\right]\\&=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{(s-1)!}{(i-1)!\cdot(s-i)!}\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s-i}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^{i}\right]\end{aligned}$$

令$j=i-1$，$s^{*}=s-1$，得：

$$\begin{aligned}\frac{E_{s-m\times k}(N)}{s}&=\sum_{j=0}^{s^{*}}\left[\frac{s^{*}!}{j!\cdot(s^{*}-i)!}\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s^{*}-j}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^{j+1}\right]\\&=P_{1-m\times k}(1)\sum_{j=0}^{s^{*}}\left[\frac{s^{*}!}{j!\cdot(s^{*}-i)!}\left(P_{1-m\times k}(0)\right)^{s^{*}-j}\left(P_{1-m\times k}(1)\right)^{j}\right]\end{aligned}$$

由于$P_{1-m\times k}(0)+P_{1-m\times k}(1)=1$，于是由二项式公式及推论 1 中的（8）式得，

$$\frac{E_{s-m\times k}(N)}{s}=P_{1-m\times k}(1)\left(P_{1-m\times k}(0)+P_{1-m\times k}(1)\right)^{s^{*}}=P_{1-m\times k}(1)=E_{1-m\times k}(N)$$

证毕。

4 仿真

4.1 防御方 AMM 不同波次拦截的 SSKP 相同时的突防概率及其数学期望

不失一般性，考虑防御方三个波次拦截、且 AMM 不同波次拦截的 SSKP 相同。图 1 给出并比较了在 1-m×k 模式下的突防导弹个数的期望曲线，X 轴是 SSKP。由定理 1，由于 1-2×1 与 1-1×2 两模式下的概率相同,1-3×1 与 1-1×3 两模式下的概率相同,1-3×2 与 1-2×3 两模式下的概率相同,所以,1-2×1/1-3×1/1-3×2 模式下期望曲线未标出。

由推论 1，对于单弹进攻 1-m×k 的攻防模式，突防导弹个数的数学期望就是单弹的突防概率，因此图 1 也是在不同 SSKP 下的 1-m×k 模式的突防概率曲线。

4.2 多波次进攻下的突防概率分布图

不失一般性，假设防御方 AMM 拦截的 SSKP 等于 0.5。图 2 给出在 s-1×1 的 1 对 1 拦截、1 到 5 波次进攻模式下的突防概率分布图，X 轴是突防的导弹数。

由于 1-1×1 的 1 对 1 拦截模式下，$P_{1-1\times1}(0)=P_{1-1\times1}(1)=0.5$，于是由图 2 可见，经 s 波次进攻 1 对 1 拦

截，有 s/2 个导弹突防的概率最大，突防概率分布图关于 s/2 对称；当 s 是奇数时，有$\lfloor s/2 \rfloor$个导弹突防的概率和有$\lceil s/2 \rceil$个导弹突防的概率相等并最大。

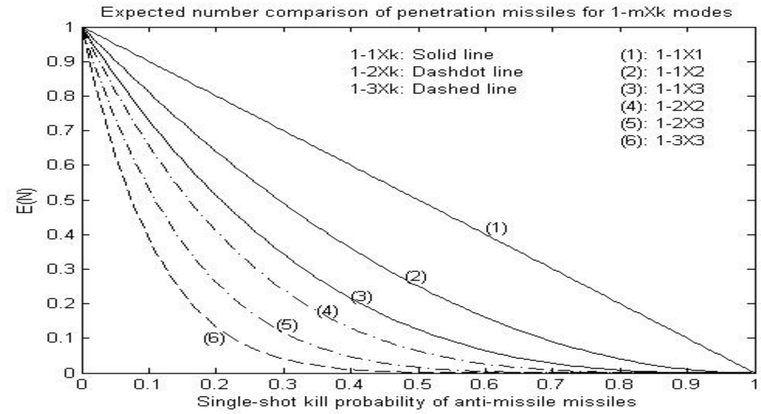

图 1 防御反 AMM 系统各波次的 SSKP 相同时的突防个数期望曲线图

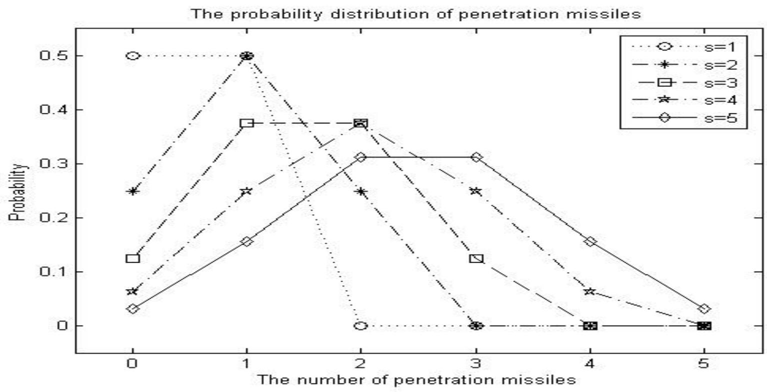

图 2 在 s-1×1 模式下的突防概率分布图

5 总结

多波次进攻与拦截、多弹齐射进攻与拦截下的导弹突防概率计算是一个复杂问题，其计算模型复杂，特别是在多弹齐射进攻下模型表达与推导是下一步工作的重点。本文推导了单弹进攻与多波次单弹进攻模式下的突防概率与突防导弹数数学期望的计算模型，通过仿真，则有如下结论：

（1）对于防御方来说，如果 AMM 命中率 SSKP 比较高时，建议采用 1 对 1 拦截比较好，不需要太多波次的拦截，也不需要多弹齐射拦截。

（2）对于进攻方来说，如果 AMM 命中率 SSKP 比较低时，建议进攻方采用多波次进攻、每波次一枚导弹进攻的方案。

参考文献：

[1] X.J. Bu, Y.G. Ren, J.C. Sha. Influence of missile fusillade engagement mode on operation efficiency [J]. Journal of China Ordnance, 2008, 4(3): 230-234.

[2] R. H. Gramann, B. M. Butler, M. K. Manoff. A combinatorial model for determining penetration probability of warheads accompanied by decoys [R]. AD0425843, 1963, JUN.

[3] 曾家有,等. 基于航路规划的反舰导弹发射顺序和间隔研究[J]. 航天控制, 2009, 27(2): 22-25.

[4] 任义广,等. 舰空导弹反导作战拦截次数的建模与仿真[J]. 火力与指挥控制, 2009, 34(10): 108-110.

[5] 杨辉耀,等. 常规导弹突防作战对策研究[J]. 军事运筹与系统工程, 2002, 15(1): 7-10.